APPUNTI DI MATEMATICA

ALGEBRA \ ARITMETICA \ NUMERI NATURALI (1)

I numeri naturali hanno un **ordine**; ogni numero naturale ha un **successivo** (ottenuto aggiungendo 1), e ogni numero naturale diverso da zero ha un **precedente** (ottenuto sottraendo 1).

Simboli di disuguaglianza (per tutti gli insiemi numerici, tranne C):

- $<$: minore;
- $>$: maggiore;
- $\leq$: minore o uguale;
- $\geq$: maggiore o uguale.

N è un insieme (totalmente) **ordinato** (ossia, dati due numeri naturali qualsiasi a , b , vale uno ed uno solo dei tre seguenti casi: $a < b$, $a = b$, $a > b$).

Una **operazione** è una "procedura" che genera un valore unico (il **risultato** dell'operazione) partendo da uno o più valori dati (detti **operandi** dell'operazione), seguendo delle regole "meccanicistiche".

- Una **operazione unaria** è una operazione con **un solo** operando;
- Una **operazione binaria** è una operazione con **due** operandi.

I simboli utilizzati per indicare le varie operazioni sono chiamati **operatori** (+ , - , $*$, : , etc.).

Operazioni dell'aritmetica: addizione, moltiplicazione (operazioni fondamentali), sottrazione, divisione ($\Rightarrow$ le quattro operazioni elementari), elevamento a potenza, estrazione della radice (tutte e sei binarie).

Terminologia delle operazioni aritmetiche:

- **addizione**: i due operandi sono gli **addendi**, il risultato è la **somma**;
- **sottrazione**: (primo operando: minuendo, secondo operando: sottraendo) il risultato è la **differenza**;
- **moltiplicazione**: i due operandi sono i **fattori**, il risultato è il **prodotto**;
- **divisione** ("**reale**" , senza resto, ossia con (eventuale) parte decimale): il primo operando è il **dividendo**, il secondo operando è il **divisore**, il risultato è il **quoziente.**

Non si deve confondere una data operazione con il suo risultato.

Priorità delle operazioni (in assenza di parentesi !):

1) operazioni di elevamento a potenza ed estrazione della radice (da sinistra a destra);
2) moltiplicazioni e divisioni (da sinistra a destra);
3) addizioni e sottrazioni (da sinistra a destra).

Elevamento a potenza ed estrazione della radice; moltiplicazione e divisione; addizione e sottrazione; sono operazioni di pari priorità.

APPUNTI DI MATEMATICA

ALGEBRA \ ARITMETICA \ NUMERI NATURALI (2)

Definizione di **somma** di due numeri naturali a , b : $a + b = a + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{b\,volte}$.

Definizione di **prodotto** di due numeri naturali a , b : $a * b = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{b\,volte}$.

L'addizione e la moltiplicazione fra due numeri naturali danno sempre come risultato un numero naturale, ossia la somma e il prodotto di due numeri naturali sono sempre numeri naturali, ossia esistono sempre in N . [Espressioni equivalenti: l'addizione e la moltiplicazione sono operazioni **interne** in N ; **N è chiuso** rispetto all'addizione e alla moltiplicazione.]

Definizione di **differenza** tra due numeri (qualunque) a , b : $a - b = c$ se $c + b = a$.

La sottrazione tra due numeri naturali può NON dare come risultato un numero naturale, ossia la differenza tra due numeri naturali può NON essere un numero naturale, ossia non sempre esiste in N . [Ossia, la sottrazione NON è una operazione interna in N ; N NON è chiuso rispetto alla sottrazione.]

Definizione di **quoziente** tra due numeri (qualunque) a , b (con $b \neq 0$) : $a : b = c$ se $c * b = a$.

La divisione tra due numeri naturali (col secondo diverso da zero) può NON dare come risultato un numero naturale, ossia il quoziente tra due numeri naturali può NON essere un numero naturale, ossia non sempre esiste in N . [Ossia, la divisione NON è una operazione interna in N ; N NON è chiuso rispetto alla divisione.]

Se il quoziente della divisione tra due numeri naturali a , b ($b \neq 0$) è un numero naturale, si dice che la divisione è **esatta**, e che il quoziente è esatto (ossia è un numero "senza virgola, né cifre decimali").

Se la divisione tra due numeri naturali a , b ($b \neq 0$) è esatta (ossia, se $a : b = c \in N$; ossia, se esiste un numero naturale c tale che $a = b * c$) , si dice che:
- a è divisibile per b;
- b divide a;
- b è divisore di a;
- a è multiplo di b;
- b è sottomultiplo di a.

Naturalmente, se a è divisibile per b , con $a = b * q$, allora a automaticamente è divisibile anche per q (sempre se $q \neq 0$) , ossia è possibile scambiare tra loro i ruoli di divisore e quoziente. [Mentre ciò non è più sempre vero se a non è divisibile per b.]

In N, invece, è sempre possibile eseguire la divisione "**intera**" ("con resto"; il quoziente "si ferma alle unità", "non ha la virgola", "non ha cifre decimali").

APPUNTI DI MATEMATICA

ALGEBRA \ ARITMETICA \ NUMERI NATURALI (3)

Teorema fondamentale della divisione:

Dati due numeri naturali a , b (con $b \neq 0$), esistono e sono unici altri due numeri naturali q ed r , tali che:
$a = b * q + r$, con $0 \leq r < b$.
(a dividendo , b divisore, q quoziente, r resto).

Dati due numeri naturali a , b ($b \neq 0$) , a è divisibile per b se e solo se il resto della divisione (intera) è 0 .

[Note (utili per i casi pratici) sul teorema:
- il teorema si applica tipicamente se $a > b$ (> 0) ;
- se $a = b$ (> 0) , il teorema vale ancora, con $q = 1$ e $r = 0$ ($< b$) (ossia $a = b * 1 + 0$) ;
- se $a < b$ ($a \geq 0$, $b > 0$) , il teorema vale ancora, con $q = 0$ e $r = a$ ($< b$) (ossia $a = b * 0 + a$) ;
- in generale, è sempre $q \leq a$, $r \leq a$;
- in generale, non c'è nessuna relazione particolare tra b e q (ossia può essere $b > q$, $b = q$, o $b < q$) ;
- in generale, non c'è nessuna relazione particolare tra r e q (ossia può essere $r > q$, $r = q$, o $r < q$) .]

Proprietà delle operazioni (addizione e moltiplicazione): (a , b , c numeri qualunque)

- proprietà **commutativa dell'addizione**: $a + b = b + a$

- proprietà **commutativa della moltiplicazione**: $a * b = b * a$

- proprietà **associativa dell'addizione**: $(a + b) + c = a + (b + c)$

- proprietà **associativa della moltiplicazione**: $(a * b) * c = a * (b * c)$

- proprietà **distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione**: $a*(b + c) = a * b + a * c$
  [in forma equivalente: $(a + b) * c = a * c + b * c$]

- esistenza e unicità dell'**elemento neutro dell'addizione**: 0 , tale che: $a + 0 = 0 + a = a$

- esistenza e unicità dell'**elemento neutro della moltiplicazione**: 1 , tale che: $a * 1 = 1 * a = a$

- esistenza e unicità dell'**opposto di ogni numero a** : -a , tale che: $a + (-a) = (-a) + a = 0$
  (NON vale però in N)

- esistenza e unicità dell'**inverso di ogni numero a $\neq$ 0** : $\frac{1}{a}$, tale che: $a * \left(\frac{1}{a}\right) = \left(\frac{1}{a}\right) * a = 1$
  (NON vale però in N , Z ; l'inverso è detto anche reciproco)

APPUNTI DI MATEMATICA

ALGEBRA \ ARITMETICA \ NUMERI NATURALI (4)

Definizione di **sottrazione** di due numeri a , b : $a - b = a + (-b)$.

Definizione di **divisione** di due numeri a , b ($b \neq 0$) : $a : b = a * \left(\frac{1}{b}\right)$.

Note:
- Non vale la proprietà distributiva della addizione rispetto alla moltiplicazione;
- Non valgono né la proprietà commutativa né la proprietà associativa né della sottrazione né della divisione;
- La proprietà distributiva è alla base (in algebra) della regola pratica del raccoglimento a fattor comune.

Casi particolari:

- $a * 0 = 0 * a = 0$;
- $a - a = 0$;
- $a : a = 1$ ($a \neq 0$) ;
- $a - 0 = a$;
- $a : 1 = a$;
- $0 : a = 0$ ($a \neq 0$) ;
- $a : 0$ = OPERAZIONE IMPOSSIBILE !!! ($a \neq 0$)
- $0 : 0$ = OPERAZIONE INDETERMINATA !!!

Legge di annullamento del prodotto: un prodotto è nullo se e solo se almeno uno dei fattori è nullo.

(Equivalentemente: un prodotto si annulla se e solo se almeno uno dei fattori si annulla; un prodotto è uguale a zero se e solo se almeno uno dei fattori è uguale a zero).

Il prodotto può essere di un numero qualunque di fattori (2 , 3 , ...).

APPUNTI DI MATEMATICA

ALGEBRA \ ARITMETICA \ NUMERI NATURALI (5)

Dato un numero naturale a , un **divisore** di a è un numero naturale b diverso da zero che divide a .

- Un numero naturale a diverso da zero ha un numero finito di divisori;
- 0 ha infiniti divisori (ossia ogni numero naturale diverso da zero divide lo 0);
- 0 NON è un divisore !!!
- Il primo divisore teorico è 1.

Dato un numero naturale a diverso da zero, un **multiplo** di a è un qualunque numero naturale b ottenuto moltiplicando a per un certo numero naturale c (0 compreso).

- Un numero naturale a diverso da zero ha un numero infinito di multipli (tanti quanti i numeri naturali);
- 0 ha un unico multiplo, 0 stesso;
- 0 è multiplo di ogni numero naturale;
- Il primo multiplo teorico è 0.

Principali criteri di divisibilità (di un numero intero):

- per 2 : l'ultima cifra (la cifra più a destra) del numero è 0 , o 2 , o 4 , o 6 , o 8 ;
- per 3 : la somma delle cifre del numero è divisibile per 3 ;
- per 5 : l'ultima cifra (la cifra più a destra) del numero è 0 o 5 ;
- per 9 : la somma delle cifre del numero è divisibile per 9 .

Definizione di **potenza** tra due numeri naturali a , b (non contemporaneamente nulli):

$$c = a^b = \underbrace{a * a * ... * a}_{b volte} .$$

Terminologia:
- operazione: **elevamento a potenza** ;
- operandi: a = **base** , b = **esponente** ;
- risultato: c = **potenza** .

Casi particolari:

- $a^0 = 1 , \forall a \neq 0$;
- $a^1 = a , \forall a$;
- $1^n = 1 , \forall n$ (e quindi $1^0 = 1 , 1^1 = 1$) ;
- $0^n = 0 , \forall n \neq 0$ (e quindi $0^1 = 0$) ;
- 0^0 = ESPRESSIONE PRIVA DI SIGNIFICATO !!!

APPUNTI DI MATEMATICA

ALGEBRA \ ARITMETICA \ NUMERI NATURALI (6)

Proprietà delle potenze (a,b,c,m,n numeri naturali; base ed esponente non contemporaneamente nulli):

1) $a^n * a^m = a^{n+m}$;
2) $a^n : a^m = a^{n-m}$ $(a \neq 0)$;
3) $a^c * b^c = (a * b)^c$;
4) $a^c : b^c = (a : b)^c$ $(b \neq 0)$;
5) $(a^b)^c = a^{b*c}$.

Casi pratici:

3-a) $(a * b)^c = a^c * b^c$;
4-a) $(a : b)^c = a^c : b^c$ $(b \neq 0)$.
2-b) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $(a \neq 0)$;
4-b) $\dfrac{a^c}{b^c} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^c$ $(b \neq 0)$;
4-c) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^c = \dfrac{a^c}{b^c}$ $(b \neq 0)$.

Interpretazione delle proprietà delle potenze:

1) Il prodotto di due potenze con stessa base è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti.
2) Il quoziente di due potenze con stessa base è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti.
3) Il prodotto di due potenze con stesso esponente è una potenza che ha per base il prodotto delle basi e per esponente lo stesso esponente.
4) Il quoziente di due potenze con stesso esponente è una potenza che ha per base il quoziente delle basi e per esponente lo stesso esponente.
5) La potenza di una potenza è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti.

Ulteriori interpretazioni:

3-a) La potenza di un prodotto è il prodotto delle singole potenze;
4-a) La potenza di un quoziente è il quoziente delle singole potenze;
4-c) La potenza di una frazione è la frazione delle singole potenze.

APPUNTI DI MATEMATICA

ALGEBRA \ ARITMETICA \ NUMERI NATURALI (7)

Un numero naturale p si dice **primo** se è divisibile **solo** per 1 e per se stesso (equivalentemente: se i suoi unici divisori sono 1 e p stesso).

Dato il numero naturale n , i due numeri 1 e n sono detti **divisori impropri** di n (perciò un numero è primo se i suoi unici divisori sono i due divisori impropri).

Un numero naturale $n > 1$ ha sempre (almeno) due divisori (i divisori impropri); 0 NON è un divisore !!!

Un numero naturale n non è primo se ha (almeno) un divisore diverso dai due divisori impropri (cioè ha almeno un **divisore proprio**).

- 1 non è primo perché ha un unico divisore (i due divisori impropri coincidono);
- 0 non è primo perché è divisibile per qualsiasi numero diverso da zero (ossia ha infiniti divisori);
- Il primo numero primo è 2 (ed è anche l'unico numero primo pari; tutti gli altri sono dispari);
- I numeri primi sono infiniti.

Teorema fondamentale dell'aritmetica:

Ogni numero naturale n (> 1) può essere scritto come prodotto di numeri primi; tale scrittura è unica, a meno dell'ordine in cui compaiono i fattori.

La scrittura precedente si chiama **fattorizzazione** o **scomposizione del numero in prodotto di fattori primi**.

Nella fattorizzazione del numero naturale n , uno o più numeri primi possono essere ripetuti più volte; è allora più conveniente scrivere il prodotto di tutti i numeri primi uguali come potenza del numero primo ripetuto. Si ha quindi, propriamente, una scomposizione del numero in prodotto di fattori-potenze di numeri primi (ossia la base di ogni singola potenza deve essere un numero primo).

APPUNTI DI MATEMATICA

ALGEBRA \ ARITMETICA \ NUMERI NATURALI (8)

- Il **massimo comun divisore** (**M.C.D.**) tra due o più numeri naturali (diversi da zero) è il più grande tra i loro divisori comuni (definizione). (Il M.C.D. è ovviamente diverso da zero!)
- Il **massimo comun divisore** tra due o più numeri naturali (diversi da zero) è il prodotto dei soli fattori primi comuni, ciascuno preso con l'esponente più piccolo (regola pratica).
- Il **minimo comune multiplo** (**m.c.m.**) tra due o più numeri naturali (diversi da zero) è il più piccolo tra i loro multipli comuni, diversi da zero (definizione). (Il m.c.m. è quindi diverso da zero)
- Il **minimo comune multiplo** tra due o più numeri naturali (diversi da zero) è il prodotto di tutti i fattori primi, comuni e non comuni, ciascuno preso con l'esponente più grande (regola pratica).

Due numeri naturali (diversi da zero) si dicono **primi tra loro** (o **coprimi**) se il loro M.C.D. è 1 (ossia, se non hanno divisori in comune, tranne il numero 1).

Se due numeri naturali sono primi, allora sono anche primi tra loro; viceversa, se due numeri sono primi tra loro, non è detto che siano necessariamente anche primi.

Dividendo due numeri naturali per il loro M.C.D. , si ottengono due numeri primi tra loro.

Dati due numeri naturali a , b diversi da zero , e detti M e m rispettivamente il loro M.C.D. e il loro m.c.m. , si ha: $a * b = M * m$.

(Di conseguenza, se due numeri sono primi tra loro, il loro m.c.m. è dato direttamente dal loro prodotto).

Due numeri naturali consecutivi (ossia tali che differiscono di una unità) sono sempre primi tra loro.

Il concetto di numeri primi tra loro si estende poi ad un numero qualsiasi di numeri naturali (3 , 4 , 5 , e così via). Di conseguenza, si potrà allora dire che due (o più) numeri naturali (sempre diversi da zero) sono primi tra loro se il loro M.C.D. è 1 (come in precedenza).

APPUNTI DI MATEMATICA

ALGEBRA \ ARITMETICA \ NUMERI INTERI (1)

Da ogni numero naturale (diverso da zero) si possono “ricavare” due numeri, per mezzo dei 2 segni + e - . I numeri con il segno + si chiamano positivi, i numeri con il segno – si chiamano negativi; 0 è l’unico numero senza segno.

- Due numeri si dicono **concordi** se hanno lo stesso segno;
- Due numeri si dicono **discordi** se hanno segno diverso.

Il **valore assoluto** o **modulo** di un numero è il numero considerato “senza segno” (ossia, “privato del segno”); per indicarlo si usa il simbolo $| \; |$.

Definizione di valore assoluto o modulo di un numero x: $|x| = \begin{cases} +x \ , & \text{se } x \geq 0 \ ; \\ -x \ , & \text{se } x < 0 \ . \end{cases}$

Proprietà fondamentali del modulo:

$|x| \geq 0 \ , \ \forall x \in R$;

$|x| = 0 \iff x = 0$.

Due numeri si dicono **opposti** se hanno lo stesso valore assoluto e sono discordi. (Di conseguenza, si possono anche dire l’uno opposto dell’altro; naturalmente, la somma di due numeri opposti tra loro è 0.)

- Tra due numeri positivi, il maggiore è quello di valore assoluto maggiore;
- Tra due numeri negativi, il maggiore è quello di valore assoluto minore;
- Ogni numero positivo è sempre maggiore di ogni numero negativo;
- 0 è maggiore di ogni numero negativo, ed è minore di ogni numero positivo.

I numeri interi hanno un **ordine**; ogni numero intero ha un **successivo** (ottenuto aggiungendo 1), e ogni numero intero ha un **precedente** (ottenuto sottraendo 1).

Z è un insieme (totalmente) **ordinato** (ossia, dati due numeri interi qualsiasi a , b , vale uno ed uno solo dei tre seguenti casi: $a < b$, $a = b$, $a > b$).

Due numeri opposti sono equidistanti dallo 0.

APPUNTI DI MATEMATICA

ALGEBRA \ ARITMETICA \ NUMERI INTERI (2)

L'addizione e la moltiplicazione fra due numeri interi danno sempre come risultato un numero intero, ossia la somma e il prodotto di due numeri interi sono sempre numeri interi, ossia esistono sempre in Z . [Espressioni equivalenti: l'addizione e la moltiplicazione sono operazioni **interne** in Z ; **Z è chiuso** rispetto all'addizione e alla moltiplicazione.]

La sottrazione tra due numeri interi dà sempre come risultato un numero intero, ossia la differenza tra due numeri interi è sempre un numero intero, ossia esiste sempre in Z . [Ossia, la sottrazione è una operazione **interna** in Z ; **Z è chiuso** rispetto alla sottrazione.]

La divisione tra due numeri interi (col secondo diverso da zero) può NON dare come risultato un numero intero, ossia il quoziente tra due numeri interi può NON essere un numero intero, ossia non sempre esiste in Z . [Ossia, la divisione NON è una operazione interna in Z ; Z NON è chiuso rispetto alla divisione.]

- La somma di due numeri interi concordi è un numero che ha per modulo la somma dei moduli, e per segno lo stesso segno dei due numeri;
- La somma di due numeri interi discordi è un numero che ha per modulo la differenza tra il maggiore e il minore dei moduli, e per segno il segno del numero di modulo maggiore.

In Z , ogni numero ha opposto (ottenuto cambiando il segno del numero stesso); l'opposto di 0 è 0 .

Un numero ed il suo opposto hanno segni diversi (a parte, naturalmente, lo 0).

Definizione di **sottrazione** di due numeri a , b : $a - b = a + (-b)$.

Il prodotto di due numeri interi è un numero intero che ha:
- per modulo, il prodotto dei moduli dei due numeri interi;
- per segno, il segno positivo se i 2 fattori sono concordi, il segno negativo se i 2 fattori sono discordi.

Se si moltiplicano più di due numeri interi, per determinare il segno del prodotto basta contare il numero di fattori negativi (ossia, in pratica, il numero di "segni – "):
- se il numero è pari, il prodotto è positivo;
- se il numero è dispari, il prodotto è negativo.

Moltiplicare un numero per –1 equivale a cambiargli il segno, ottenendo come risultato il suo opposto (e viceversa: cambiare il segno ad un numero equivale a moltiplicarlo per –1).

Per la divisione, vale la "regola dei segni" della moltiplicazione.

La potenza di un numero intero è un numero intero che ha:
- per modulo, la potenza del modulo del numero intero;
- per segno, il segno negativo solo se la base è negativa e l'esponente è dispari, il segno positivo negli altri tre casi (base negativa ed esponente pari, oppure base positiva ed esponente pari o dispari).

APPUNTI DI MATEMATICA

ALGEBRA \ ARITMETICA \ NUMERI RAZIONALI (1)

Una **frazione** è una coppia ordinata di numeri interi, di cui il secondo diverso da zero.

Il primo numero della coppia (numeratore) è al di sopra della "linea di frazione"; il secondo numero della coppia (denominatore) è al di sotto della "linea di frazione".

Una frazione rappresenta il quoziente tra due numeri interi, ossia il loro rapporto; $\frac{n}{m}$ = n:m (m $\neq 0$) .

Dato che in una divisione il divisore non può mai essere uguale a zero (e quindi, dato che la divisione per zero è una operazione impossibile), **il denominatore di una frazione non può mai essere uguale a zero** (e quindi **non esistono frazioni con denominatore zero**).

- Le frazioni col numeratore minore del denominatore sono dette frazioni proprie;
- Le frazioni col numeratore maggiore del denominatore sono dette frazioni improprie;
- Le frazioni col numeratore multiplo del denominatore sono dette frazioni apparenti (e corrispondono in pratica a dei numeri interi).

Due frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ sono **equivalenti** se $a \cdot d = b \cdot c$ (cioè se sono uguali i due "prodotti in croce").

Due frazioni equivalenti rappresentano in pratica lo stesso numero razionale.

Proprietà invariantiva delle frazioni: moltiplicando numeratore e denominatore di una frazione per lo stesso numero intero diverso da zero, o dividendo numeratore e denominatore di una frazione per lo stesso numero intero diverso da zero (e loro divisore comune), si ottiene una frazione equivalente alla frazione data.

Semplificare una frazione significa in pratica applicare la proprietà invariantiva alla frazione data, dividendo numeratore e denominatore per uno stesso numero (diverso da zero).

Una frazione si dice **ridotta ai minimi termini** se numeratore e denominatore non hanno più divisori in comune diversi da 1 (ossia, se numeratore e denominatore sono primi tra loro, ossia il loro M.C.D. è 1).

In pratica, una frazione è ridotta ai minimi termini se è semplificata "il più possibile".

Per ridurre una frazione ai minimi termini, basta dividere numeratore e denominatore per il loro M.C.D. (diverso da zero per definizione).

Ridurre a denominatore comune due (o più) frazioni significa trovare altre due (o più) frazioni aventi tutte lo stesso denominatore, ciascuna equivalente alla corrispondente frazione data.

Applicando la proprietà invariantiva, si hanno infinite possibili soluzioni a questo problema. Per convenzione, tra tutti i possibili denominatori comuni si sceglie il più piccolo, e precisamente il m.c.m. tra i vari denominatori; si ha quindi la **riduzione al minimo comune denominatore** (**m.c.d.**).

APPUNTI DI MATEMATICA

ALGEBRA \ ARITMETICA \ NUMERI RAZIONALI (2)

$$\frac{-n}{m} = \frac{n}{-m} = -\frac{n}{m} \ .$$

Un numero razionale corrisponde in pratica ad una frazione ridotta ai minimi termini (viceversa, ogni frazione corrisponde ad un numero razionale).

Le frazioni con denominatore 1 corrispondono ai numeri interi.

<u>In Q è sempre possibile la divisione tra numeri naturali/interi/razionali</u> (purché, naturalmente, il divisore sia diverso da zero), ossia in Q il quoziente esiste sempre. [La divisione è quindi un'operazione **interna** in Q ; **Q è chiuso** rispetto alla divisione.]

<u>Q è un insieme (totalmente) ordinato</u>.

Ricapitolando:

- In Q (ed R) sono sempre possibili le prime quattro operazioni "elementari" (addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione – naturalmente, per un divisore diverso da zero), ossia in Q (ed R) esistono sempre la somma, la differenza, il prodotto, ed il quoziente ("reale").
  [Ossia, Q (ed R) sono chiusi rispetto ad addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione.]

- N , Z , Q (ed R) sono insiemi infiniti.

- N , Z , Q (ed R) sono insiemi (totalmente) ordinati.

APPUNTI DI MATEMATICA

ALGEBRA \ ARITMETICA \ NUMERI RAZIONALI (3)

$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$ $(c \neq 0)$; $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{d} = \frac{ar \pm bs}{m}$, con m = m.c.d. , r = m:c , s = m:d $(c, d \neq 0)$.

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ $(b, d \neq 0)$.

In Q , ogni numero (diverso da zero) ha inverso (o reciproco); l'inverso del numero razionale espresso dalla frazione $\frac{n}{m}$ è il numero razionale espresso dalla frazione $\frac{m}{n}$, che si ottiene dalla frazione data "scambiando tra loro" numeratore e denominatore.

(Di conseguenza, $\frac{n}{m}$ e $\frac{m}{n}$ si possono anche dire inversi tra loro, o l'uno inverso dell'altro.)

Poiché non possono esistere frazioni con denominatore 0 , il numero 0 (uguale, ad es., a $\frac{0}{1}$) **non** ha inverso.

L'inverso del numero intero a $(a \neq 0)$ è $\frac{1}{a}$.

Un numero e il suo inverso hanno lo stesso segno; l'inverso di +1 è +1 , l'inverso di -1 è -1 .

Definizione di **divisione** tra due numeri a , b $(b \neq 0)$: a:b = $a \cdot \frac{1}{b}$.

Di conseguenza, dati due numeri razionali $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ $\left(= \frac{a \cdot d}{b \cdot c}\right)$ $(b, c, d \neq 0)$.

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, con $n \in N$ $(b \neq 0)$.

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $(a \neq 0)$.

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$, con $n \in N$ $(a, b \neq 0)$.

Per n = 1 , si ottiene l'inverso (anche come simbolo) di un numero diverso da zero: $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

APPUNTI DI MATEMATICA

ALGEBRA \ ARITMETICA \ NUMERI REALI (1)

Se una frazione è apparente, corrisponde in pratica ad un numero intero, e può quindi essere rappresentata (in modo unico) mediante un numero intero.

Se una frazione è decimale (cioè ha come denominatore una potenza di 10 , con esponente naturale maggiore di 0), o è equivalente ad una frazione decimale, può essere rappresentata (in modo unico) mediante la rappresentazione decimale, basata sulla scrittura posizionale e sull'uso della virgola. Le cifre assumono un valore diverso a seconda della posizione in cui si trovano nel numero (come nel caso dei numeri naturali ed interi); la virgola serve per separare la parte intera dalla parte decimale del numero.
In questo modo, ad ogni numero razionale rappresentabile mediante una frazione decimale viene fatto corrispondere un numero decimale finito, ossia un numero decimale avente un numero finito di cifre decimali.

Non tutti i numeri razionali sono rappresentabili mediante frazioni decimali; lo sono, infatti, solo quelli corrispondenti a frazioni che, ridotte ai minimi termini, hanno il denominatore contenente come fattori primi solo (potenze di) 2 e 5 (divisori propri di 10).
Quando una frazione non può essere trasformata (applicando la proprietà invariantiva) in una frazione decimale, la frazione corrisponde allora ad un numero decimale periodico, ossia ad un numero decimale avente un numero infinito di cifre decimali, tali che, da un certo punto in avanti, si ripetono sempre a gruppi sempre uguali; il gruppo di cifre ripetute si chiama periodo, il gruppo di cifre (se esiste) comprese tra la virgola e il periodo si chiama antiperiodo. [Si dimostra che il periodo non può mai essere 9.]

In generale, un numero razionale (non intero) può sempre essere rappresentato mediante un numero decimale finito o periodico.

Data una frazione (qualunque), il numero decimale corrispondente si può ottenere dalla divisione tra il numeratore e il denominatore della frazione.

Esistono procedimenti matematici (come, per esempio quello della "estrazione della radice") che portano invece a numeri decimali illimitati e non periodici; esistono dunque numeri decimali che NON corrispondono a numeri razionali.

Un numero **irrazionale** è un numero decimale illimitato e non periodico.

I numeri irrazionali sono di due tipi: algebrici (legati, in sostanza, all'estrazione di radici), e trascendenti (non legati all'estrazione di radici; ad es., $\pi = 3{,}14159\ldots$, e la costante di Nepero e = 2,71828182845…).

Per indicare il valore esatto di un numero decimale illimitato (periodico o non periodico), non potendo naturalmente scriverne tutte le (infinite) cifre decimali, se ne scrivono solo le prime (in numero variabile a seconda dei casi), seguite da puntini; qualora poi non serva proprio il valore esatto, si può usare allora un valore approssimato (per difetto o per eccesso), sempre con le sole prime cifre decimali volute (e sempre in numero variabile a seconda dei casi), ma utilizzando, anziché il simbolo $=$, il simbolo $\cong$.

Un numero **reale** è un numero razionale o irrazionale.

APPUNTI DI MATEMATICA

ALGEBRA \ ARITMETICA \ NUMERI REALI (2)

Alcune proprietà fondamentali dei numeri reali:

- In R , ogni quadrato è maggiore o uguale a zero (vero anche per N , Z , Q);
- Ogni numero reale non negativo è un quadrato (non vero per N , Z , Q);
- R è un insieme infinito, (totalmente) ordinato;
- I numeri reali possono essere rappresentati su una retta orientata; ed anzi:
- Ad ogni numero reale corrisponde un punto su una retta, e viceversa (non vero per N , Z , Q).

N non è chiuso rispetto alla sottrazione, mentre Z è chiuso rispetto alla sottrazione; in altri termini, partendo dai numeri naturali, la sottrazione, operazione “inversa” dell’addizione, è diventata operazione interna introducendo i numeri interi (aggiungendo i numeri negativi).
Analogamente, Z non è chiuso rispetto alla divisione, mentre Q è chiuso rispetto alla divisione; in altri termini, partendo dai numeri interi, la divisione, operazione “inversa” della moltiplicazione, è diventata operazione interna introducendo i numeri razionali (aggiungendo le frazioni aventi denominatore diverso da 1).

L’operazione “inversa” dell’operazione di elevamento a potenza (ad esponente naturale n > 0) è l’operazione di “estrazione della radice (n-esima)”; Q non è chiuso rispetto all’operazione di “estrazione della radice”, ossia l’operazione di “estrazione di radice” non è interna in Q.
Nell’insieme dei numeri reali non negativi, l’operazione di estrazione di una qualunque radice è interna (e quindi ogni numero non negativo può essere considerato, ad es., come un quadrato); l’operazione è diventata interna aggiungendo ai numeri razionali i numeri irrazionali (algebrici).

APPUNTI DI MATEMATICA

ALGEBRA \ ARITMETICA \ CALCOLO NUMERICO

Dati n numeri reali $x_1,...,x_n$ (con n $\in$ N , n > 0) , **il valor medio m** degli n numeri è dato dalla media aritmetica degli n numeri, ossia: m = $\dfrac{x_1 + ... + x_n}{n}$.