

APPUNTI DI MATEMATICA

ALGEBRA \ CALCOLO LETTERALE \ MONOMI (1)

Un monomio è un prodotto di numeri e lettere; gli (eventuali) esponenti delle lettere sono numeri naturali (0 incluso).

Ogni numero (reale) può essere considerato come un monomio; in particolare, 0 è il monomio nullo.

Un monomio si dice “ridotto a forma normale” se è il prodotto di un numero e di una parte letterale in cui le lettere sono tutte diverse tra loro.

(N.b.: solitamente, salvo diversa avvertenza, o a meno che il monomio considerato non sia un risultato parziale di determinati calcoli, tutti i monomi si intendono già ridotti a forma normale, e vengono chiamati semplicemente monomi; questa avvertenza varrà sempre, d’ora in avanti.)

- **Il coefficiente** (numerico) di un monomio è il fattore numerico (cioè il numero), comprensivo del segno;
- **La parte letterale** di un monomio è il complesso delle varie lettere.

Se il coefficiente di un monomio è 1 o -1 , il numero 1 non viene scritto e viene quindi sottinteso; viceversa, se in un monomio manca il coefficiente numerico, questo può sempre essere considerato come unitario (in modulo), ovvero può sempre essere aggiunto un fattore numerico pari a 1.

Se l’esponente di una lettera è 1, l’esponente non viene scritto; viceversa, se in un monomio una lettera compare senza esponente, questo viene considerato pari a 1, ovvero può sempre essere aggiunto 1 ad esponente.

- **Il grado relativo** di un monomio rispetto ad una certa lettera è l’esponente con cui compare la data lettera;
- **Il grado assoluto** (o semplicemente **grado**) di un monomio è la somma di tutti gli esponenti delle lettere (ossia, la somma di tutti i gradi relativi).

Se nel monomio è presente una sola lettera, esiste un solo grado relativo, e inoltre grado relativo e grado assoluto coincidono (esiste insomma un solo grado).

Tutti i numeri reali (eccettuato lo 0) sono considerati come monomi di grado 0; al numero 0, ossia al monomio nullo, per convenzione non si attribuisce alcun grado.

Due o più monomi si dicono simili se hanno la stessa parte letterale (esponenti compresi !).

Due monomi simili si dicono opposti se sono opposti i loro coefficienti (quindi hanno la stessa parte letterale, coefficiente numerico uguale in modulo, e segni opposti).

APPUNTI DI MATEMATICA

ALGEBRA \ CALCOLO LETTERALE \ MONOMI (2)

La **somma algebrica** di due o più monomi **simili tra loro** è un monomio **simile** ai monomi dati, che ha per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti dei monomi dati (e quindi la stessa parte letterale !).

La somma algebrica di due o più monomi NON tutti simili tra loro, invece, NON è più un monomio (ma un polinomio).

Il **prodotto** di due o più monomi (**qualunque**) è un monomio, che ha per coefficiente il prodotto dei coefficienti, e per parte letterale il prodotto delle parti letterali.

Il **grado** del monomio prodotto è la somma dei gradi dei monomi fattori.

La **potenza** di un monomio (**ad esponente naturale**) è un monomio, che ha per coefficiente la potenza del coefficiente, e per parte letterale la potenza della parte letterale.

La potenza di un monomio ad esponente intero negativo, invece, può NON essere più un monomio.

Un monomio (dividendo) è **divisibile per un altro monomio** (divisore) se ogni lettera del dividendo è presente anche nel divisore, e l'esponente della lettera nel dividendo è maggiore o uguale all'esponente della lettera nel divisore.

Dire che il dividendo è divisibile per il divisore equivale a dire che il dividendo è **multiplo** del divisore.

Il **quoziente** di due monomi (**col primo divisibile per il secondo**, e il secondo diverso da 0) è un monomio che ha per coefficiente il quoziente dei coefficienti, e per parte letterale il quoziente delle parti letterali.

Il quoziente di un monomio dividendo NON divisibile per il monomio divisore, invece, NON è più un monomio.

Il **grado** del monomio quoziente è la differenza tra i gradi del monomio dividendo e del monomio divisore.

(Invece, per l'addizione e la sottrazione tra monomi NON vale una regola analoga per il grado del monomio risultato: il grado del monomio somma o differenza NON ha alcun legame col grado dei vari monomi da sommare o sottrarre.)

Ricapitolando:

- l'insieme dei monomi è chiuso solo rispetto alla moltiplicazione (e non rispetto all'addizione, alla sottrazione, all'elevamento a potenza, alla divisione);
- l'insieme dei monomi è chiuso rispetto all'elevamento a potenza con esponente naturale;
- ogni insieme di monomi simili tra loro è chiuso rispetto all'addizione e alla sottrazione.

APPUNTI DI MATEMATICA

ALGEBRA \ CALCOLO LETTERALE \ MONOMI (3)

La priorità delle operazioni tra monomi è la stessa delle operazioni tra numeri.

Proprietà delle operazioni:

- Valgono la proprietà commutativa dell'addizione e della moltiplicazione;
- Valgono la proprietà associativa dell'addizione e della moltiplicazione;
- Vale la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione;
- Esiste l'elemento neutro dell'addizione e della moltiplicazione (rispettivamente, il monomio 0 e il monomio 1);
- Ogni monomio ha opposto;
- Non tutti i monomi, invece, hanno inverso.

- Il **massimo comun divisore (M.C.D.)** tra due o più monomi (diversi da zero) è ogni monomio di grado massimo che sia divisore di tutti i monomi dati (definizione).
(Il M.C.D. è ovviamente diverso da zero!)
- Il **massimo comun divisore** tra due o più monomi (diversi da zero) ha per parte letterale il prodotto delle sole lettere comuni a tutti i monomi, ciascuna presa con l'esponente più piccolo (regola pratica).
- Il **minimo comune multiplo (m.c.m.)** tra due o più monomi (diversi da zero) è ogni monomio (diverso da zero) di grado minimo che sia multiplo di tutti i monomi dati (definizione).
(Il m.c.m. è quindi diverso da zero)
- Il **minimo comune multiplo** tra due o più monomi (diversi da zero) ha per parte letterale il prodotto di tutte le lettere comuni e non comuni dei vari monomi, ciascuna presa con l'esponente più grande (regola pratica).

In pratica:

- se i coefficienti dei vari monomi sono tutti numeri interi, il M.C.D. e il m.c.m. dei vari monomi hanno per coefficiente, rispettivamente, il M.C.D. e il m.c.m. dei coefficienti dei vari monomi;
- se qualche monomio ha coefficiente numerico non intero, il M.C.D. e il m.c.m. dei vari monomi hanno entrambi per coefficiente (per convenzione) il numero 1 ;
- in ogni caso, al M.C.D. e al m.c.m. tra monomi viene associato il doppio segno \pm .

APPUNTI DI MATEMATICA

ALGEBRA \ CALCOLO LETTERALE \ POLINOMI (1)

Un **polinomio** è una somma algebrica di monomi (non tutti simili tra loro).

I monomi che compongono il polinomio si chiamano **termini** del polinomio.

Ogni monomio può essere considerato come un polinomio di un solo termine (e quindi 0 è anche il polinomio nullo).

Un polinomio si dice “ridotto a forma normale” se non presenta monomi simili tra loro.

Se un polinomio, per un motivo qualsiasi, non si presenta ridotto a forma normale, **deve** essere ridotto a forma normale, operando la cosiddetta “riduzione dei termini simili”, cioè calcolando la somma algebrica di tutti i monomi simili tra loro, secondo le regole già viste. Di conseguenza, d’ora in avanti tutti i polinomi si intendono già ridotti a forma normale, considerando invece i polinomi non ridotti a forma normale come delle “espressioni polinomiali” ancora da semplificare.

- Un **binomio** è un polinomio di 2 termini;
- Un **trinomio** è un polinomio di 3 termini;
- Un **quadrinomio** è un polinomio di 4 termini.

- Il **grado relativo** di un polinomio rispetto ad una certa lettera è il maggiore dei gradi relativi dei vari monomi rispetto a quella lettera (in pratica, è l’esponente più alto con cui compare la lettera nei vari monomi del polinomio);
- Il **grado assoluto** (o semplicemente **grado**) di un polinomio è il maggiore tra i gradi (assoluti) dei vari monomi.

Se nel polinomio è presente una sola lettera, esiste un solo grado relativo, e inoltre grado relativo e grado assoluto coincidono (esiste insomma un solo grado, dato in pratica dall’esponente maggiore con cui compare la lettera nel polinomio).

Un polinomio si dice **omogeneo** se tutti i monomi hanno lo stesso grado.

Un polinomio si dice **ordinato** (in modo crescente o decrescente) rispetto ad una certa lettera se i monomi sono disposti in modo tale che gli esponenti di quella lettera siano in ordine crescente o decrescente.

Un polinomio si dice **completo** rispetto ad una certa lettera se presenta tutte le potenze di quella lettera, fino al grado 0 (se invece manca anche una sola potenza, il polinomio si dice **incompleto**).

Il termine di grado 0 di un polinomio viene detto **termine noto**.

Se un polinomio in una sola lettera è completo e ha grado n , ha $(n+1)$ termini.

Se un polinomio presenta una sola lettera, per convenzione va scritto ordinato (solitamente in modo decrescente, in casi particolari in modo crescente).

APPUNTI DI MATEMATICA

ALGEBRA \ CALCOLO LETTERALE \ POLINOMI (2)

La **somma** di due polinomi è il polinomio che ha per termini tutti i termini dei due polinomi addendi.

In generale, il polinomio somma NON è ridotto a forma normale (e bisogna quindi ridurlo).

Il polinomio **opposto** di un polinomio è il polinomio che si ottiene cambiando i segni al polinomio dato.

La **differenza** di 2 polinomi è il polinomio che si ottiene sommando il primo con l'opposto del secondo.

In generale, il polinomio differenza NON è ridotto a forma normale (e bisogna quindi ridurlo).

In pratica, la **somma algebrica** di due o più polinomi si ottiene calcolando la somma algebrica tra tutti i monomi simili tra loro, secondo le regole già viste.

Il **prodotto** di un monomio per un polinomio è il polinomio che si ottiene moltiplicando il monomio dato per ogni monomio del polinomio.

Il **prodotto** di due polinomi è il polinomio che si ottiene moltiplicando ogni termine del primo polinomio per ogni termine del secondo polinomio.

In generale, il polinomio prodotto NON è ridotto a forma normale (e bisogna quindi ridurlo).

Se i due polinomi fattori hanno rispettivamente n e m termini, il polinomio prodotto (prima dell'eventuale riduzione a forma normale) ha $(n*m)$ termini.

Il grado del polinomio prodotto è la somma dei gradi dei polinomi fattori.

La **potenza** di un polinomio (**ad esponente naturale**) è un polinomio; per calcolare il polinomio potenza, in generale (salvo casi particolari) si trasforma l'operazione di elevamento a potenza nell'operazione di moltiplicazione, in base alla definizione teorica di elevamento a potenza ad esponente naturale.

La potenza di un polinomio ad esponente intero negativo, invece, può NON essere più un polinomio.

In conclusione, quindi, l'insieme dei polinomi è chiuso rispetto all'addizione, alla sottrazione, alla moltiplicazione, e all'elevamento a potenza con esponente naturale.

La priorità delle operazioni tra polinomi è la stessa delle operazioni tra numeri.

Proprietà delle operazioni:

- Valgono la proprietà commutativa dell'addizione e della moltiplicazione;
- Valgono la proprietà associativa dell'addizione e della moltiplicazione;
- Vale la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione;
- Esiste l'elemento neutro dell'addizione e della moltiplicazione (rispettivamente, il polinomio 0 e il polinomio 1);
- Ogni polinomio ha opposto;
- Non tutti i polinomi, invece, hanno inverso.

APPUNTI DI MATEMATICA

ALGEBRA \ CALCOLO LETTERALE \ POLINOMI (3)

Siano A , B due quantità qualsiasi (numeri, monomi, polinomi, frazioni algebriche, espressioni qualsiasi, etc.); si hanno allora i seguenti **prodotti notevoli**:

- 1) $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$ (prodotto della somma per la differenza)
- 2) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ (quadrato del binomio somma)
- 3) $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ (quadrato del binomio differenza)
- 4) $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$ (cubo del binomio somma)
- 5) $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$ (cubo del binomio differenza)

Notare che:

- $(A + B)^2 \neq A^2 + B^2$
- $(A - B)^2 \neq A^2 - B^2$
- $(A + B)^3 \neq A^3 + B^3$
- $(A - B)^3 \neq A^3 - B^3$
- $A^2 + B^2$ NON è un prodotto notevole (in \mathbb{R} ; lo è in \mathbb{C})

APPUNTI DI MATEMATICA

ALGEBRA \ CALCOLO LETTERALE \ POLINOMI (4)

“Scomporre in fattori” un polinomio significa scriverlo sotto forma di prodotto di polinomi, tutti di grado inferiore (tenendo presente, poi, che i monomi possono essere considerati come casi particolari di polinomi; ciò vale, sostanzialmente, nel caso del “raccolgimento a fattor comune”).

La scomposizione in fattori viene anche chiamata “fattorizzazione”.

E’ di fondamentale importanza riuscire a scomporre il polinomio “quanto più possibile”, ossia nel prodotto di un certo numero di fattori non più ulteriormente scomponibili, e quindi aventi ognuno il minor grado possibile (tali fattori hanno un ruolo analogo a quello dei numeri primi in aritmetica, nella scomposizione di un numero intero in prodotto di fattori primi).

In teoria, utilizzando l’insieme \mathbb{R} dei numeri reali come insieme numerico dei coefficienti, i polinomi-fattore di grado minimo da determinare hanno al più grado 2 (ossia hanno grado 1 o 2 ; qui si intendono polinomi veri e propri, e non anche monomi come caso particolare). In pratica, però, a volte bisogna utilizzare anche i numeri complessi per arrivare alla fattorizzazione prevista dalla teoria, e quindi, potendo utilizzare il solo insieme \mathbb{R} come insieme “di lavoro”, i polinomi-fattore possono avere grado anche superiore a 2 .

Non esiste un metodo generale per ottenere la scomposizione di un dato polinomio; i metodi più semplici (e importanti e frequenti) sono i tre seguenti:

- 1) raccolgimento a fattor comune;
- 2) individuazione di prodotti notevoli;
- 3) mediante teoria dei trinomi di 2° grado.

1) Se tutti i termini di un dato polinomio presentano uno stesso fattore (numerico e/o letterale), allora è possibile metterlo in evidenza con un raccolgimento a fattor comune (applicando al contrario, in sostanza, la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all’addizione).

(Nota: se il fattore raccolto è puramente numerico, e ha quindi grado 0 , l’altro fattore ha lo stesso grado del polinomio di partenza.)

In pratica, il fattore comune che va raccolto è il M.C.D. dei vari monomi componenti il polinomio; tra parentesi, andranno poi riportati via via i quozienti delle divisioni tra i vari monomi del polinomio e l’M.C.D. stesso.

2) Particolari binomi, trinomi, e quadrimoni possono essere lo sviluppo di determinati prodotti notevoli:

- | | |
|--|--|
| 1) $A^2 - B^2 = (A + B) \cdot (A - B)$ | (prodotto della somma per la differenza) |
| 2) $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$ | (quadrato del binomio somma) |
| 3) $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$ | (quadrato del binomio differenza) |
| 4) $A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A + B)^3$ | (cubo del binomio somma) |
| 5) $A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = (A - B)^3$ | (cubo del binomio differenza) |

I vari metodi si possono poi anche combinare tra loro.

APPUNTI DI MATEMATICA

ALGEBRA \ CALCOLO LETTERALE \ POLINOMI (5)

Le definizioni e le regole pratiche relative al M.C.D. e al m.c.m. fra polinomi sono analoghe a quelle fra monomi; per le regole pratiche, si intende naturalmente che i polinomi-fattore delle varie scomposizioni sono quelli di grado minimo possibile (e verranno chiamati semplicemente fattori, anche per analogia con l'aritmetica dei numeri primi).

Definizioni:

- Il **massimo comun divisore (M.C.D.)** tra due o più polinomi (diversi da zero) è ogni polinomio di grado massimo che sia divisore di tutti i polinomi dati.
(Il M.C.D. è ovviamente diverso da zero!)
- Il **minimo comune multiplo (m.c.m.)** tra due o più polinomi (diversi da zero) è ogni polinomio (diverso da zero) di grado minimo che sia multiplo di tutti i polinomi dati.
(Il m.c.m. è quindi diverso da zero)

Regole pratiche:

- Il **massimo comun divisore** tra due o più polinomi (diversi da zero) è il prodotto di tutti i fattori comuni, ciascuno preso con l'esponente più piccolo.
- Il **minimo comune multiplo** tra due o più polinomi (diversi da zero) è il prodotto di tutti i fattori comuni e non comuni, ciascuno preso con l'esponente più grande.

Come per i monomi, poi, al M.C.D. e al m.c.m. tra polinomi viene associato il doppio segno \pm .