

APPUNTI DI MATEMATICA

ALGEBRA \ SISTEMI LINEARI (1)

L'equazione (numerica intera di 1° grado in 2 incognite, x e y) $ax + by + c = 0$ ammette infinite soluzioni, ossia è indeterminata.

Un sistema di equazioni è un insieme di equazioni nelle stesse incognite.

Le soluzioni del sistema sono le soluzioni **comuni** a **tutte** le equazioni del sistema.

Risolvere un sistema significa trovare (se esistono) **tutte** le soluzioni del sistema.

Un'equazione (numerica o letterale) si dice **algebraica intera** se è scritta nella forma di un polinomio uguagliato a 0, ossia se tutti i termini dell'equazione sono monomi.

Il **grado** di un sistema di equazioni algebriche intere è dato dal **prodotto** dei gradi delle singole equazioni componenti il sistema.

Un sistema di primo grado viene detto anche sistema lineare.

Due sistemi sono **equivalenti** se hanno le stesse soluzioni.

Un sistema si dice **in forma normale** se, in ogni equazione, tutti i termini contenenti le incognite sono a primo membro, mentre il termine noto è a secondo membro.

Nel caso di un sistema lineare di 2 equazioni in 2 incognite, una soluzione è una coppia ordinata di numeri reali; per verificare poi se una certa coppia ordinata è soluzione del sistema, va fatta la verifica in tutte e due le equazioni del sistema.

Analogamente, nel caso di un sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite, una soluzione è una terna ordinata di numeri reali; per verificare poi se una certa terna ordinata è soluzione del sistema, va fatta la verifica in tutte e tre le equazioni del sistema.

In generale, nel caso di un sistema lineare di n equazioni in n incognite, una soluzione è una ennupla ordinata di numeri reali; per verificare poi se una certa ennupla ordinata è soluzione del sistema, va fatta la verifica in tutte le n equazioni del sistema.

(In altre parole, per ogni soluzione del sistema vanno fatte tante verifiche quante sono le equazioni del sistema stesso.)

Vi sono numerosi metodi per risolvere un sistema di equazioni; per i sistemi lineari, i metodi più comuni sono i seguenti:

- 1) metodo di sostituzione (metodo “generale”);
- 2) metodo del confronto;
- 3) metodo di riduzione (detto anche di addizione/sottrazione, o anche della combinazione lineare);
- 4) metodo di Cramer.

APPUNTI DI MATEMATICA

ALGEBRA \ SISTEMI LINEARI (2)

- Un sistema si dice **determinato** se ha un numero **finito** di soluzioni (in particolare, un sistema lineare determinato ha una sola soluzione);
- Un sistema si dice **impossibile** se non ha soluzioni (ovvero, se non ha nessuna soluzione; ovvero, se ha zero soluzioni);
- Un sistema si dice **indeterminato** se ha infinite soluzioni.

Interpretazione geometrica (nel piano cartesiano) di un sistema lineare di 2 equazioni in 2 incognite x, y :

- 1) sistema determinato: 2 rette incidenti (in un punto del piano)
(Una sola soluzione algebrica, e una sola soluzione geometrica, costituita da un punto del piano; la coppia ordinata di numeri reali soluzione del sistema corrisponde alle coordinate del punto intersezione delle 2 rette, e viceversa);
- 2) sistema impossibile: 2 rette parallele (distinte)
(Nessuna soluzione algebrica, e nessuna soluzione geometrica, cioè nessun punto in comune tra le 2 rette);
- 3) sistema indeterminato: 2 rette (parallele) coincidenti
(Infinite soluzioni algebriche, e infinite soluzioni geometriche, cioè infiniti punti in comune tra le due rette).

Osservazioni (geometriche):

- l'equazione numerica intera di 1° grado in una incognita $ax + b = 0$ può essere ripensata, nel piano, come il sistema $\begin{cases} y = ax + b \\ y = 0 \end{cases}$;
- l'intersezione con l'asse x della generica retta di equazione esplicita $y = mx + q$ (con $m \neq 0$) può essere pensata come soluzione del sistema $\begin{cases} y = mx + q \\ y = 0 \end{cases}$.