APPUNTI DI MATEMATICA

GEOMETRIA \ GEOMETRIA EUCLIDEA \ GEOMETRIA DEL PIANO (1)

Un **ente** (geometrico) è un "oggetto" studiato dalla geometria. Per descrivere gli enti vengono utilizzate delle definizioni. Una **definizione** è una frase nella quale viene associato un nome ad un ente, e vengono elencate le sue caratteristiche. Essendo materialmente impossibile definire ogni ente senza fare riferimento a qualche altro ente, bisogna necessariamente ammettere che alcuni enti non vengano definiti, ma vengano accettati come noti; questi enti sono detti **enti primitivi**. Di solito, vengono considerati come enti primitivi il punto, la retta, il piano.

- I punti vengono indicati con lettere dell'alfabeto (latino) maiuscole;
- Le rette vengono indicate con lettere dell'alfabeto (latino) minuscole.

Una **figura geometrica** è un insieme qualsiasi di punti.

Lo **spazio** è l'insieme di tutti i punti; lo spazio contiene quindi tutte le figure.

- Una **figura piana** è una figura appartenente ad un piano;
- Una **figura solida** è una figura non appartenente ad un piano.

(**D'ora in avanti, salvo diverse avvertenze, si farà riferimento sempre e solo a figure PIANE**)

Come - per gli enti geometrici - non è possibile dare per tutti una definizione, ma bisogna accettarne alcuni come noti (enti primitivi), così – anche per le proprietà delle figure geometriche - non è possibile dare per tutte una dimostrazione, ma bisogna ammetterne alcune come sicuramente sempre vere, senza necessità di dimostrazione (**proprietà fondamentali**, per così dire "primitive").

- Un **postulato** o **assioma** è un enunciato che viene assunto come sempre vero ("indimostrabile");
- Un **teorema** è un enunciato la cui verità può essere dimostrata.

Proprietà fondamentali delle rette di un piano:

1) Per due punti distinti di un piano passa una e una sola retta (postulato di esistenza ed unicità);
2) Su una retta ci sono almeno due punti;
3) Per ogni retta del piano esiste almeno un punto nel piano che non le appartiene (e quindi, in un certo senso, in un piano ci sono almeno tre punti, però non allineati; punti allineati sono punti che stanno sulla stessa retta);
4) Per tre punti non allineati passa uno e un solo piano (postulato di esistenza ed unicità);
5) Fissati due punti in piano, la retta passante per i due punti giace interamente nel piano;
6) La retta è un insieme di punti ordinato, illimitato (non esiste né un primo né un ultimo punto), denso (fra due suoi punti esiste sempre almeno un altro punto, e quindi esistono infiniti altri punti), e quindi infinito (ossia, la retta contiene infiniti punti).

Proprietà conseguenti:

1) Ogni piano contiene infiniti punti e infinite rette (e quindi ogni piano è un insieme infinito);
2) Per un punto passano infinite rette.

Il postulato n. 6 (postulato dell'ordine) permette di assegnare ad ogni retta un "verso di percorrenza".
Una retta su cui sia fissato un verso si dice **retta orientata**.

APPUNTI DI MATEMATICA

GEOMETRIA \ GEOMETRIA EUCLIDEA \ GEOMETRIA DEL PIANO (2)

Data una retta orientata e un suo punto O , si chiamano **semirette**:
- l'insieme formato da O e dai punti che lo seguono;
- l'insieme formato da O e dai punti che lo precedono.

Una semiretta è quindi ciascuna delle due parti in cui una retta viene divisa da un suo punto.
Il punto O si chiama **origine** della semiretta.
Fissato un punto O qualunque su una retta, si hanno quindi due **semirette opposte**, aventi entrambe la stessa origine O ; l'origine è il solo punto che le due semirette opposte hanno in comune. Le due semirette si dicono l'una il **prolungamento** dell'altra.

Le semirette (come le rette) vengono di solito indicate con lettere dell'alfabeto (latino) minuscole.

Anche una semiretta è un insieme <u>ordinato</u>, <u>illimitato</u>, <u>denso</u>, e <u>infinito</u>.

Data una retta orientata e due suoi punti A e B , si chiama **segmento** AB l'insieme dei punti della retta formato da A , da B , e da tutti i punti compresi tra A e B .
- I punti A e B che "originano" il segmento si chiamano **estremi** del segmento;
- I punti compresi tra A e B si chiamano **punti interni** del segmento.

Un segmento è **nullo** se i suoi estremi coincidono, ossia se è privo di punti interni; il segmento nullo è quindi costituito da un solo punto.

Un segmento (non nullo) è un insieme <u>ordinato</u>, <u>limitato</u>, <u>denso</u>, e <u>infinito</u>.

Data una retta r di un piano, si chiama **semipiano** ciascuno dei due insiemi di punti del piano costituito dalla retta e da una delle due parti del piano in cui il piano stesso è diviso dalla retta data.
La retta r si chiama **origine** del semipiano.
I due semipiani hanno quindi la retta origine in comune.

APPUNTI DI MATEMATICA

GEOMETRIA \ GEOMETRIA EUCLIDEA \ GEOMETRIA DEL PIANO (3)

Si chiama **angolo** ciascuna delle due parti di piano individuate da due semirette aventi la stessa origine, incluse le due semirette stesse.
- Le due semirette si chiamano **lati** dell'angolo;
- Il punto origine si chiama **vertice** dell'angolo.

I due angoli hanno quindi i lati (e il vertice) in comune.
I punti che appartengono all'angolo ma non ai suoi lati (e quindi non il vertice) si chiamano **punti interni** dell'angolo.

Per indicare gli angoli, vi sono vari tipi di notazione, a seconda dei casi; solitamente:
- se l'angolo è individuato dal vertice O e dai lati a e b , si usa la notazione $a\hat{O}b$;
- se l'angolo è individuato dal vertice O e dai punti A sul lato a e B sul lato b , si usa la notazione $A\hat{O}B$;
- altrimenti, si usa il solo vertice ($\hat{A}, \hat{B}, \hat{C},$ ... e così via), oppure si usano le lettere dell'alfabeto greco minuscole ($\alpha, \beta, \gamma,$ ... e così via).

Angoli notevoli:

- Un angolo è **piatto** quando i suoi lati sono due semirette opposte;
- Un angolo è **giro** quando i suoi lati sono due semirette coincidenti, e coincide con l'intero piano;
- Un angolo è **nullo** quando i suoi lati sono due semirette coincidenti, e non comprende altri punti del piano oltre quelli dei lati;
- Un angolo è **retto** quando è la metà di un angolo piatto.

Un angolo piatto coincide quindi con un semipiano, un angolo giro con l'intero piano.
(Un angolo piatto è il doppio di un angolo retto; un angolo piatto è la metà di un angolo giro; un angolo giro è il doppio di un angolo piatto.)

- Una figura è **convessa** se, per ogni coppia di punti della figura, il segmento che congiunge i due punti appartiene interamente alla figura stessa;
- Una figura è **concava** se non è convessa (e quindi, se esistono due punti della figura tali che il segmento che li congiunge non appartiene interamente alla figura, e cioè se esiste almeno un suo punto che non appartiene alla figura).

- Il piano, tutti i semipiani, tutte le rette, tutte le semirette, tutti i segmenti sono figure convesse;
- Gli angoli possono essere figure sia concave che convesse.

APPUNTI DI MATEMATICA

GEOMETRIA \ GEOMETRIA EUCLIDEA \ GEOMETRIA DEL PIANO (4)

- Due figure sono **uguali** se coincidono punto a punto;
- Due figure sono **congruenti** se sono sovrapponibili punto a punto l'una sull'altra mediante un movimento rigido.

(Un movimento rigido consente di spostare una figura senza deformarla; il concetto di movimento rigido è un concetto primitivo.)

Due figure uguali sono anche congruenti (ma non sempre vale anche il viceversa).

Postulati:
- Tutte le rette sono tra loro congruenti;
- Tutte le semirette sono tra loro congruenti;
- Tutti i semipiani (e quindi anche tutti gli angoli piatti) sono tra loro congruenti.

Teorema:
- Tutti gli angoli retti sono tra loro congruenti.

Per indicare la congruenza di due figure F e F' si usa il simbolo $\cong$; si scrive allora: F $\cong$ F' (che si legge: F è congruente a F' , ovvero F e F' sono congruenti).

- Due segmenti congruenti hanno uguale **lunghezza**;
- Due angoli congruenti hanno uguale **ampiezza**.

Dato un segmento AB, la sua lunghezza si rappresenta con $\overline{AB}$; di conseguenza:

- la notazione AB rappresenta un segmento (insieme infinito di punti);
- la notazione $\overline{AB}$ rappresenta una lunghezza, ossia una misura (numero reale non negativo).

(Invece, dato un certo angolo, α può rappresentare sia l'angolo che la sua misura.)

Per due punti passano infinite linee e infinite curve, ma una sola retta; per individuare in modo univoco una linea o una curva, non bastano più (come per la retta) due soli punti.
Il segmento che ha per estremi i due punti rappresenta il "percorso" minimo per "andare" da un punto all'altro.
La **distanza tra due punti** è la lunghezza del segmento che ha per estremi i due punti.

In simboli: $d(A,B) = \overline{AB} \quad (\geq 0)$; $d(A,B) = d(B,A)$, dato che $\overline{AB} = \overline{BA}$.

Il punto medio di un segmento è **il** punto del segmento che divide il segmento dato in due segmenti congruenti.
Il punto medio di un segmento esiste sempre ed è unico (postulato).

La bisettrice di un angolo è **la** semiretta uscente dal vertice che divide l'angolo dato in due angoli congruenti.
La bisettrice di un angolo esiste sempre ed è unica (postulato).

APPUNTI DI MATEMATICA

GEOMETRIA \ GEOMETRIA EUCLIDEA \ GEOMETRIA DEL PIANO (5)

[Nelle 4 seguenti definizioni, per maggiore e minore si intende strettamente maggiore e strettamente minore.]

- Un angolo **convesso** è minore di un angolo piatto;
- Un angolo **concavo** è maggiore di un angolo piatto e minore di un angolo giro.

- Un angolo è **acuto** se è minore di un angolo retto;
- Un angolo è **ottuso** se è maggiore di un angolo retto e minore di un angolo piatto.

Angoli acuti e ottusi sono convessi.

- Due angoli sono **opposti** se la loro somma è l'angolo nullo;
- Due angoli sono **complementari** se la loro somma è un angolo retto;
- Due angoli sono **supplementari** se la loro somma è un angolo piatto;
- Due angoli sono **esplementari** se la loro somma è un angolo giro.

- Due angoli complementari dello stesso angolo sono congruenti;
- Due angoli supplementari dello stesso angolo sono congruenti.

Due angoli sono **opposti al vertice** se i lati di un angolo sono i prolungamenti dei lati dell'altro.

Se due angoli sono opposti al vertice, hanno in comune il vertice e i loro lati appartengono alle stesse rette.

Se due angoli sono opposti al vertice, allora sono congruenti.

Due rette incidenti (aventi cioè un solo punto in comune) dividono il piano in quattro angoli convessi, con due coppie di angoli opposti al vertice, e due coppie (considerate nei due possibili modi) di angoli supplementari.

MISURE NOTEVOLI

- L'angolo nullo misura 0° ;
- L'angolo retto misura 90° ;
- L'angolo piatto misura 180° ;
- L'angolo giro misura 360° .

- Due angoli sono opposti se la loro somma misura 0° ;
- Due angoli sono complementari se la loro somma misura 90° ;
- Due angoli sono supplementari se la loro somma misura 180° ;
- Due angoli sono esplementari se la loro somma misura 360° .

- Se l'angolo α è convesso, $0° < \alpha < 180°$;
- Se l'angolo α è concavo, $180° < \alpha < 360°$;
- Se l'angolo α è acuto, $0° < \alpha < 90°$;
- Se l'angolo α è ottuso, $90° < \alpha < 180°$.

APPUNTI DI MATEMATICA

GEOMETRIA \ GEOMETRIA EUCLIDEA \ RETTE

Dato che per due punti passa una ed una sola retta, se due rette si incontrano in due punti allora necessariamente devono coincidere; pertanto due rette distinte possono incontrarsi in un solo punto.

Due rette (distinte) sono **incidenti** se si incontrano in un solo punto. (Equivalentemente: se hanno un solo punto in comune.)

Due rette incidenti (e quindi distinte) sono **perpendicolari** se dividono il piano in quattro angoli retti.

Equivalentemente: due rette incidenti (e quindi distinte) sono **perpendicolari** se dividono il piano in quattro angoli congruenti.

Più semplicemente, si ha la più nota definizione "elementare": due rette incidenti (e quindi distinte) sono **perpendicolari** se incontrandosi formano un angolo retto.

Per indicare che le due rette r , s sono tra loro perpendicolari, si scrive: $r \perp s$.

Due rette incidenti che non siano anche perpendicolari si dicono **oblique**.

Per un punto del piano passa una ed una sola retta perpendicolare ad una retta data (teorema).

L'asse di un segmento è **la** retta perpendicolare al segmento, passante per il punto medio del segmento stesso.

La proiezione ortogonale di un punto P su una retta r (con $P \notin r$) è il punto Q della retta r in cui la perpendicolare s condotta dal punto P alla retta r incontra la retta r .

Teorema: il segmento perpendicolare condotto da un punto P ad una retta r (con $P \notin r$) è minore di ogni segmento obliquo condotto dallo stesso punto alla stessa retta.

La distanza di un punto P da una retta r è la lunghezza del segmento che ha per estremi il punto P e la sua proiezione ortogonale sulla retta r .

Due rette sono **parallele** se non hanno alcun punto in comune o se coincidono (e quindi hanno infiniti punti in comune).

Per indicare che le due rette r , s sono tra loro parallele, si scrive: $r \parallel s$.

Data una retta r ed un punto P non appartenente alla retta, esiste ed è unica la retta s passante per P e parallela alla retta data (esistenza: teorema; unicità: quinto postulato di Euclide).

- Due rette parallele ad una stessa retta sono parallele;
- Due rette perpendicolari ad una stessa retta sono parallele.

La distanza tra due rette parallele è la distanza di un qualsiasi punto di una retta dall'altra retta.

APPUNTI DI MATEMATICA

GEOMETRIA \ GEOMETRIA EUCLIDEA \ TRIANGOLI (1)

Un **triangolo** è l'insieme dei punti del piano costituito da una poligonale chiusa di tre lati ($\Rightarrow$ non intrecciata!) e dai suoi punti interni.

I **lati** del triangolo sono i segmenti della poligonale.

I punti estremi dei tre lati si chiamano **vertici** del triangolo.

Un vertice del triangolo viene detto **opposto a un lato** se non appartiene al lato.

Gli angoli (comprendenti i punti del triangolo) individuati da ciascuna delle (tre) coppie di lati del triangolo vengono detti **angoli interni** (o semplicemente angoli) del triangolo. Gli angoli interni hanno quindi per vertice un vertice del triangolo e per lati le semirette che contengono i lati del triangolo.

Un angolo interno è **opposto a un lato** (e viceversa, un lato è opposto ad un angolo interno) se i (due) lati dell'angolo non contengono quel lato del triangolo (in altre parole, il lato non concorre a formare l'angolo).

L'**altezza relativa ad un lato** è il segmento che, partendo dal vertice opposto al lato, incontra il lato (o il suo prolungamento) formando con esso due angoli retti (e quindi risulta perpendicolare al lato, o al suo prolungamento).

Un triangolo ha tre altezze.

L'altezza relativa ad un lato può anche non appartenere al triangolo (caso del triangolo ottusangolo).

APPUNTI DI MATEMATICA

GEOMETRIA \ GEOMETRIA EUCLIDEA \ TRIANGOLI (2)

Classificazione dei triangoli rispetto ai lati:

1) Un triangolo è **equilatero** se ha i tre lati congruenti;
2) Un triangolo è **isoscele** se ha due lati congruenti;
3) Un triangolo è **scaleno** se ha i tre lati (tutti) non congruenti tra loro.

In un triangolo **isoscele**:
- i due lati congruenti vengono detti **lati obliqui**;
- il lato NON congruente agli altri due viene detto **base**;
- il vertice opposto alla base (ossia il vertice in comune ai due lati congruenti) viene detto appunto **il vertice**;
- l'angolo compreso tra i due lati congruenti viene detto **angolo al vertice**, gli altri due angoli vengono detti **angoli alla base**.

Teoremi sui triangoli:

- Un triangolo è isoscele se e solo se ha due angoli congruenti.
- Un triangolo è equilatero se e solo se ha tutti gli angoli congruenti.
- Se un triangolo è equilatero, allora le tre altezze sono congruenti tra loro.
- La somma di due angoli interni di un triangolo è minore (strettamente) di un angolo piatto.
- Un triangolo può avere al massimo un solo angolo retto o un solo angolo ottuso.
- Gli angoli alla base (di un triangolo isoscele) sono acuti.

Classificazione dei triangoli rispetto agli angoli:

1) Un triangolo è **acutangolo** se ha tutti e tre gli angoli acuti;
2) Un triangolo è **rettangolo** se ha un angolo retto ($\Rightarrow$ uno solo!);
3) Un triangolo è **ottusangolo** se ha un angolo ottuso ($\Rightarrow$ uno solo!).

In un triangolo **rettangolo**:
- i lati che "formano" l'angolo retto vengono detti **cateti**;
- il lato opposto all'angolo retto viene detto **ipotenusa**;
- l'altezza relativa ad un cateto è costituita dall'altro cateto;
- la bisettrice "dell'angolo retto" forma due angoli di 45° .

In un triangolo ottusangolo, le altezze relative ai due lati che "formano" l'angolo ottuso sono esterne al triangolo stesso.

APPUNTI DI MATEMATICA

GEOMETRIA \ GEOMETRIA EUCLIDEA \ TRIANGOLI (3)

Le precedenti classificazioni dei triangoli rispetto ai lati e agli angoli si possono naturalmente "fondere" tra loro; dei 9 casi formalmente possibili, in realtà ne esistono solo 7 (il triangolo equilatero può essere solamente acutangolo, e quindi non può essere né rettangolo né ottusangolo). Di conseguenza:

- un triangolo equilatero è sempre acutangolo (con tre angoli di 60°);
- un triangolo isoscele può essere acutangolo, rettangolo, ottusangolo;
- un triangolo scaleno può essere acutangolo, rettangolo, ottusangolo;
- un triangolo acutangolo può essere equilatero, isoscele, scaleno;
- un triangolo rettangolo può essere isoscele, scaleno;
- un triangolo ottusangolo può essere isoscele, scaleno.

(Un triangolo rettangolo isoscele corrisponde in pratica a "metà" di un quadrato, coi cateti congruenti a due lati consecutivi del quadrato, e l'ipotenusa congruente alla diagonale del quadrato.)

Ulteriori teoremi sui triangoli:

- In un triangolo (non equilatero), a lato maggiore si oppone angolo maggiore.
- In un triangolo (non equilatero), ad angolo maggiore si oppone lato maggiore.
- In un triangolo rettangolo, l'ipotenusa è maggiore di ciascun cateto.

Proprietà degli angoli dei triangoli:

1) In un triangolo, la somma degli angoli interni è (sempre) congruente ad un angolo piatto (e quindi misura 180°).
2) In un triangolo rettangolo, i due angoli acuti sono complementari.
3) In un triangolo rettangolo isoscele, i due angoli acuti (congruenti) misurano ciascuno 45°.
4) In un triangolo equilatero, ogni angolo è congruente alla terza parte di un angolo piatto (e quindi misura 60°).

APPUNTI DI MATEMATICA

GEOMETRIA \ GEOMETRIA EUCLIDEA \ POLIGONI

Un **poligono** è l'insieme dei punti del piano costituito da una poligonale chiusa **NON INTRECCIATA** (di n lati, con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$) e dai suoi punti interni.

Un **triangolo** è un poligono di 3 lati (ed è quindi il poligono col numero minimo di lati).

I **lati** del poligono sono i segmenti della poligonale.

I punti estremi dei lati si chiamano **vertici** del poligono.

Un poligono di n lati ha quindi n vertici.

Mentre un triangolo è sempre una figura convessa, un poligono (di almeno 4 lati) può essere una figura convessa o concava.

CONVENZIONE IMPORTANTISSIMA: d'ora in avanti, salvo diverse avvertenze, per poligono si intenderà SEMPRE un poligono CONVESSO.

Poligoni principali (tra parentesi il numero dei lati):
triangolo (3), quadrilatero (4), pentagono (5), esagono (6), ottagono (8), decagono (10), dodecagono (12).

Gli angoli (comprendenti i punti del poligono) individuati da ciascuna delle (n) coppie di lati consecutivi del poligono vengono detti **angoli interni** (o semplicemente angoli) del poligono. Gli angoli interni hanno quindi per vertice un vertice del poligono e per lati le semirette che contengono i lati del poligono.

Un poligono è convesso se e solo se tutti gli angoli interni sono convessi.

Le **diagonali di un poligono** sono i segmenti che hanno per estremi due vertici non appartenenti allo stesso lato ("non consecutivi").

Somma degli angoli interni di un poligono (convesso) di n lati ($n \geq 3$): risulta congruente a $(n-2)$ angoli piatti (e quindi misura $(n-2)\cdot 180°$; di conseguenza, la somma degli angoli interni di un triangolo misura 180° , la somma degli angoli interni di un quadrilatero misura 360°).

Un poligono è **regolare** se ha tutti i lati congruenti e tutti gli angoli congruenti.

Misura dell'angolo (interno) di un poligono **regolare** ($\Rightarrow$ convesso!) di n lati ($n \geq 3$): $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$

(di conseguenza, l'angolo di un triangolo equilatero misura 60°, l'angolo di un quadrato misura 90°).

APPUNTI DI MATEMATICA

GEOMETRIA \ GEOMETRIA EUCLIDEA \ QUADRILATERI (1)

Un **quadrilatero** è un poligono di 4 lati.

In un quadrilatero,
- due lati non aventi vertici in comune si dicono **opposti**;
- due angoli non aventi lati in comune si dicono **opposti**.

Un quadrilatero ha quindi due coppie di lati e di angoli opposti.

Un **parallelogramma** è un quadrilatero con i lati opposti paralleli.

Proprietà di un parallelogramma:
1) ciascuna diagonale lo divide in due triangoli congruenti;
2) i lati opposti sono congruenti;
3) gli angoli opposti sono congruenti;
4) gli angoli adiacenti ad ogni lato sono supplementari;
5) le diagonali si incontrano nel loro punto medio (ossia si dividono reciprocamente a metà).

Un **rettangolo** è un parallelogramma con gli angoli congruenti.

Proprietà di un rettangolo:
1) ogni angolo è retto;
2) le due diagonali sono congruenti.

Un **rombo** è un parallelogramma con i lati congruenti.

Proprietà di un rombo:
1) le due diagonali sono perpendicolari tra loro;
2) le due diagonali sono bisettrici degli angoli.

Un **quadrato** è un parallelogramma con gli angoli e i lati congruenti.

Un quadrato è quindi un caso particolare sia di rettangolo che di rombo.

Proprietà di un quadrato:
1) ogni angolo è retto;
2) le due diagonali sono congruenti, perpendicolari tra loro, e bisettrici degli angoli (che risultano quindi divisi in due angoli di 45°).

APPUNTI DI MATEMATICA

GEOMETRIA \ GEOMETRIA EUCLIDEA \ QUADRILATERI (2)

Un **trapezio** è un quadrilatero con due soli lati paralleli.

- I due lati paralleli (NON congruenti!) si chiamano **basi** (**base maggiore** e **base minore**);
- I due lati non paralleli si chiamano **lati obliqui**;
- La distanza tra le due basi (ossia la distanza tra le due rette parallele passanti per le basi) si chiama **altezza** del trapezio.

I due angoli adiacenti ad ognuno dei due lati del trapezio sono supplementari (il viceversa invece può anche non essere vero, dato che vale anche nel caso del parallelogramma).

- Un trapezio è **isoscele** se i lati obliqui sono congruenti;
- Un trapezio è **scaleno** se i lati obliqui non sono congruenti;
- Un trapezio è **rettangolo** se uno (solo!) dei lati obliqui è perpendicolare alle due basi (e quindi ha due angoli retti; gli altri due sono uno acuto e uno ottuso. In un trapezio non rettangolo, invece, si hanno sempre due angoli acuti e due angoli ottusi).

- Se un trapezio è isoscele, gli angoli adiacenti a ciascuna delle due basi sono congruenti (e viceversa: se in un trapezio gli angoli adiacenti ad una delle due basi - e quindi ad entrambe - sono congruenti, il trapezio è isoscele).
- Se un trapezio è isoscele, le due diagonali sono congruenti (e viceversa).
- Se un trapezio è isoscele, gli angoli opposti sono supplementari (e viceversa).